1　閏（うるう）年について

暦の上での 1 年は 365 日なのに対して、太陽の周りを地球が 1 周するのに必要な日数 (太陽年) は 365.2422... 日である。このため、太陽が 1 年かけて軌道上を 1 周してきても 0.2422... 日（約 6 時間）足らないことになる。このままでは、春分、夏至、秋分、冬至のような季節の始まりを表す日が、暦の上での日付からずれてしまうことになる。暦の日付と季節の始まりを表す日が大きく変わらないようにするのが、閏（うるう）年を加える理由である。

現在、使用されているのはグレゴリオ歴（もしくは太陽暦）と呼ばれ、1582 年 2 月 24 日に当時のローマ教皇グレゴリオ 13 世により導入された暦法で、それまで使用されていたユリウス歴（紀元前 45 年にユリウス・カエサルによって導入された。）を修正したものになっている。ユリウス歴では閏年を 4 年に 1 回入れていたので、日付がずれていた。

この修正は 1582 年 10 月 4 日（木）の翌日を 1582 年 10 月 15 日 (金）として、ユリウス歴で入れすぎた閏年の分だけ日数を飛ばしたものになっている。また、閏年の挿入ルールも変更した。なお、このルールによると 1 年 1 月 1 日は月曜日である。閏年の挿入ルールは以下の通りである。

1. 西暦が 4 で割り切れる年は閏年とする。
2. 上記の内、西暦が 100 で割り切れる年は閏年としない。
3. 上記の内、西暦が 400 で割り切れる年は閏年とする。

閏年を 4 年に 1 回挿入するのに比べて、400 年で 3 回少なくなっている（400 年で 97 回の閏年)。直近で 1. 以外のルールが適用されたのは 2000 年で、1. のルールにより閏年のはずが、2. のルールにより閏年ではなくなり、3. のルールによりやはり閏年となる 400 年に一回のパターンだった。

グレゴリオ歴では 400 年で 97 回の閏年があるので、

- 400 年の合計日数は $365 \times 400 + 97 = 146097$ 日である。
- 1 年あたりの平均日数は $146097/400 = 365.2425$ 日となり、太陽年よりも 1 年あたり 0.0003 日ほど（約 26 秒）長い。
- 146097 日は 7 の倍数なので、400 年後の同月同日は同じ曜日になる。

日本では明治 6 年から太陽暦が採用され、閏年の挿入のルールはグレゴリオ歴のルールと全く同じものになっている。

2　ツェラー (Zeller) の公式について

ツェラー (Zeller) の公式はグレゴリオ歴の年、月、日から曜日を算出するための公式で、日曜日から土曜日が 0 から 6 の数値として求められる。基本的な考え方は以下の通り、

- 曜日のわかっている基準となる日付からの日数を計算し、7 で割ったあまりを求めれば、曜日が求まる。
- 1 年 1 月 1 日は月曜日である。

2.1　ツェラーの公式

ツェラーの公式は以下の様なものである。h を曜日を表す 0 から 6 までの数値で 0 が日曜日、1 が月曜日...6 が土曜日とすると、y 年 m 月 d 日の曜日は、

$$h = \left(5 \cdot C + \lfloor \frac{C}{4} \rfloor + Y + \lfloor \frac{Y}{4} \rfloor + \lfloor \frac{26 \cdot (m+1)}{10} \rfloor + d + 6\right) \mod 7 \tag{1}$$

により求められる。ただし、3 月 1 日を年の初めとして、1 月と 2 月は前年の 13 月と 14 月として扱う。たとえば、2017 年 1 月 1 日、2 月 1 日はそれぞれ 2016 年 13 月 1 日、2016 年 14 月 1 日する。これは、閏年により 1 月 1 日から 3 月 1 日までの日数が変わることに対応するためである。また、西暦が 4 桁の場合、C は上位 2 桁、Y は下位 2 けたであり、

$$C = \lfloor \frac{y}{100} \rfloor \tag{2}$$

$$Y = y \mod 100 \tag{3}$$

である。ここで $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない（x 以下）の最大の整数を表し、$x \mod n$ は x を n で割った剰余である。

この式は、1 年 1 月 1 日から y 年 m 月 d 日までの日数をもとめ、7 で割った余りを計算している。1 年 1 月 1 日から y 年 m 月 m 日までの日数は 1 年 1 月 1 日から $(y-1)$ 年 14 月末日までの日数と y 年 3 月 1 日から y 年 $m-1$ 月末日までの日数と y 年 m 月 1 日から y 年 m 月 d 日までの日数の和として求めることが出来る。

2.2　1 年 1 月 1 日から $(y-1)$ 年 14 月末日までの日数を求める

まず、$m \leqq 2$ の場合は $y \leftarrow y-1$、$m \leftarrow m+12$ と書き換える。これにより、閏年でも平年でも 3 月 1 日から次の年の 2 月 28 日までの処理が同一になる。1 年 1 月 1 日から $(y-1)$ 年 14 月末日までの日数の計算は 3 つの段階に分かれる。

- 1 年 1 月 1 日から 1 年 2 月 28 日までの日数を求める。

$$31 + 28 = 58 \text{ より } 59 \text{ 日} \tag{4}$$

- 1 年 3 月 1 日から $(y-1)$ 年 14 月末日までの閏年を除いた日数を求める。

$$365 \cdot (y-1) \text{ 日} \tag{5}$$

- 1 年 1 月 1 日から $(y-1)$ 年 14 月末日までの閏年の回数を求める。

$$\lfloor \frac{(y-1)+1}{4} \rfloor - \lfloor \frac{(y-1)+1}{100} \rfloor + \lfloor \frac{(y-1)+1}{400} \rfloor = \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor \text{ 日} \tag{6}$$

  左辺の第 1 項は 4 年に 1 度、第 2 項は 100 年に 1 度、第 3 項は 400 年に 1 度適用されるルールの回数を計算している。

この 3 つの式の和が、1 年 1 月 1 日から $(y-1)$ 年 14 月末日までの日数である。これを D_0 とすると、

$$D_0 = 59 + 365 \cdot (y-1) + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor \tag{7}$$

となる。

2.3　y 年 3 月 1 日から y 年 $m-1$ 月末日までの日数を求める

$(y-1)$ 年 14 月末日以降の日数は、y 年 3 月 1 日から y 年 $m-1$ 月末日までの日数と y 年 m 月になってから d 日までの日数の和として求められる。y 年 3 月 1 日から y 年 $m-1$ 月末日までの日数を D_1 とすると、

$$D_1 = \lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor - 122 \tag{8}$$

である。突然よくわからない式が出てきたが、この式は以下の様に説明できる。まず、$3 \leqq m \leqq 14$ の月初めまで（前月の末日まで）の日数を求め以下の様な表にする。ここで、$377 \div 14 = 30.636...$ なので、$\lfloor \frac{306 \cdot m}{10} \rfloor$ を表に追加して日数との差を求めると、91 または 92 大きくなる。どちらの値になるかは表を見る限り規則性が無いと思われるので、試しに $\lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor$ を計算してみると、$3 \leqq m \leqq 14$ のすべての場合について 122 大きい値となる。つまり、月の初め（前月の末日まで）の日数は D_1 で求められる。

m	日数	$\lfloor \frac{306 \cdot m}{10} \rfloor$	差	$\lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor$	差
3	0	91	+91	122	+122
4	31	122	+91	153	+122
5	61	153	+92	183	+122
6	92	183	+91	214	+122
7	122	214	+92	244	+122
8	153	244	+91	275	+122
9	184	275	+91	306	+122
10	214	306	+92	336	+122
11	245	336	+91	367	+122
12	275	367	+92	397	+122
13	306	397	+91	428	+122
14	337	428	+91	459	+122

このような面倒な式を考えずにプログラムで場合分けにより計算するか、表にしてしまうかで値を求めればよいのだが、ツェラーが公式を考え出した、正確にはフェアフィールドという人が考えた式を変形したのは 19 世紀の終わり頃で、コンピュータはまだ無かった。

2.4　y 年 m 月 1 日から y 年 m 月 d 日までの日数を求める

日数を D_2 とすると、

$$D_2 = d \tag{9}$$

である。

2.5　1 年 1 月 1 日から y 年 m 月 d 日までの日数を求める

日数を D とすると、$D = D_0 + D_1 + D_2$ であるので、

$$D = 59 + 365 \cdot (y-1) + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor + \lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor - 122 + d \tag{10}$$

である。ここで、$59 - 365 - 122 = -428$ であるので、式は以下の様に書き換えることが出来る。

$$D = 365 \cdot y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor + \lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor + d - 428 \tag{11}$$

2.6 D の値から曜日をもとめる

$$\begin{aligned} h &= D \mod 7 \\ &= \left(365 \cdot y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor + \lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor + d - 428\right) \mod 7 \end{aligned} \tag{12}$$

とすると h は 0 から 6 の値となり、0 が日曜日、1 が月曜日...6 が土曜日のように対応することになる。1 年 1 月 1 日は 0 年 13 月 1 として計算すると $h = 1$ であり、きちんと月曜日に対応していることがわかる。

閏年でない平年の 1 月 1 日から 12 月 31 日までの日数は 365 日であり、これは、1 月 1 日から 1 月 1 日までの日数を 1 日、1 月 2 日までの日数を 2 日、1 月 3 日までの日数を 3 日、のように数えた結果なので、1 年 1 月 1 日から 1 年 1 月 1 日の日数は 1 日である。

2.7 h の値をもとめる式を簡単にする

ツェラーの公式は式（12）を簡単化したものである。式（12）の括弧内の項を変形すると、式（16）が得られる。まず、$365 \mod 7 = 1$ なので、

$$365 \cdot y \mod 7 = y \mod 7 \tag{13}$$

である。また、$-427 \mod 7 = 0$ なので、

$$\begin{aligned} -428 \mod 7 &= -1 \mod 7 \\ &= 6 \end{aligned} \tag{14}$$

である。さらに、$\lfloor \frac{306}{10} \rfloor = 30 + \lfloor \frac{6}{10} \rfloor$、$30 \mod 7 = 2$ であるので、

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{306 \cdot (m+1)}{10} \rfloor \mod 7 &= \left(30 \cdot (m+1) + \lfloor \frac{6 \cdot (m+1)}{10} \rfloor\right) \mod 7 \\ &= \left(2 \cdot (m+1) + \lfloor \frac{6 \cdot (m+1)}{10} \rfloor\right) \mod 7 \\ &= \lfloor \frac{26 \cdot (m+1)}{10} \rfloor \mod 7 \end{aligned} \tag{15}$$

である。以上をまとめると

$$h = \left(y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor + \lfloor \frac{26 \cdot (m+1)}{10} \rfloor + d + 6\right) \mod 7 \tag{16}$$

が得られる。コンピュータのプログラムで計算するならば式（16）は十分簡単な式であると言えるだろう。しかし、手計算を行うことを考えさらに簡単にする。

2.8 さらにがんばって h の値をもとめる式を簡単にする

C を年の上位 2 桁、Y を下位 2 桁とすると、$C = \lfloor\frac{y}{100}\rfloor$、$Y = y \mod 100$ となり、$y = 100 \cdot C + Y$ である。

$$\begin{aligned}
h &= \left(100 \cdot C + Y + \lfloor\frac{100 \cdot C + Y}{4}\rfloor - \lfloor\frac{100 \cdot C + Y}{100}\rfloor + \lfloor\frac{100 \cdot C + Y}{400}\rfloor + \lfloor\frac{26 \cdot (m+1)}{10}\rfloor + d + 6\right) \mod 7 \\
&= \left(100 \cdot C + Y + \lfloor 25 \cdot C + \frac{Y}{4}\rfloor - \lfloor C + \frac{Y}{100}\rfloor + \lfloor\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\rfloor + \lfloor\frac{26 \cdot (m+1)}{10}\rfloor + d + 6\right) \mod 7 \\
&= \left(100 \cdot C + Y + 25 \cdot C + \lfloor\frac{Y}{4}\rfloor - C - \lfloor\frac{Y}{100}\rfloor + \lfloor\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\rfloor + \lfloor\frac{26 \cdot (m+1)}{10}\rfloor + d + 6\right) \mod 7 \\
&= \left(124 \cdot C + Y + \lfloor\frac{Y}{4}\rfloor - \lfloor\frac{Y}{100}\rfloor + \lfloor\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\rfloor + \lfloor\frac{26 \cdot (m+1)}{10}\rfloor + d + 6\right) \mod 7 \qquad (17)
\end{aligned}$$

ここで、$124 \mod 7 = 5$ であるので、

$$124 \cdot C \mod 7 = 5 \cdot C \mod 7 \qquad (18)$$

である。また、$0 \leqq Y \leqq 99$ なので、

$$\lfloor\frac{Y}{100}\rfloor = 0 \qquad (19)$$

さらに、$0 \leqq \frac{Y}{400} \leqq 0.2475$ であり、$\frac{C}{4}$ の小数部分は 0、0.25、0.5、0.75 のいずれかなので、$\frac{C}{4}$ と $\frac{Y}{400}$ の小数部分の和が 1 を超えることはないので、

$$\lfloor\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\rfloor = \lfloor\frac{C}{4}\rfloor \qquad (20)$$

である。以上をまとめると、

$$h = \left(5 \cdot C + Y + \lfloor\frac{Y}{4}\rfloor + \lfloor\frac{C}{4}\rfloor + \lfloor\frac{26 \cdot (m+1)}{10}\rfloor + d + 6\right) \mod 7$$

となりツェラーの公式がもとまった。

2.9 まとめ：ツェラーの公式を使って曜日を求める

y 年 m 月 d 日の曜日を求める手順は以下のようになる。

1. y、m、d の値を入力する。各値が年、月、日を表す範囲内にあることを確認する。
2. $m \leqq 2$ の場合は $y \leftarrow y - 1$、$m \leftarrow m + 12$ と書き換える。
3. $C = \lfloor\frac{y}{100}\rfloor$、$Y = y \mod 100$ とする。
4. h の値を式（1）のツェラーの公式を用いて計算する。
5. h は曜日を表す 0 から 6 までの数値なので、0 は日曜日、1 は月曜日...6 は土曜日のように曜日に対応させる。

コンピュータにより計算するならば、3 番目と 4 番目の手順を式（16）で計算するようにしても良いだろう。